

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

☞ Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$. **B.** $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x + C$.

C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$. **D.** $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x} + \ln x + C\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. **B.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **D.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 3: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$. **B.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$. **D.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (6x + \sin 3x)dx = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C = F(x).$$

$$F(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1. \text{ Vậy } F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$$

Lời giải

Ta có $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3$.

Do đó $a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 5x^4$

A. $y = x^5$.

B. $y = 20x^3$.

C. $y = 4x^5$.

D. $y = \frac{x^4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$, $\int_1^3 f(x) dx = 2$, $\int_1^5 f(x) dx = 10$. Biểu thức $\int_3^5 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 12.

C. 8.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 10 - 2 = 8$.

Câu 11: Nếu $\int_2^m x^3 dx = 8$ thì giá trị của m bằng

A. $-2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt[4]{3}$.

C. $-2\sqrt[4]{3}$.

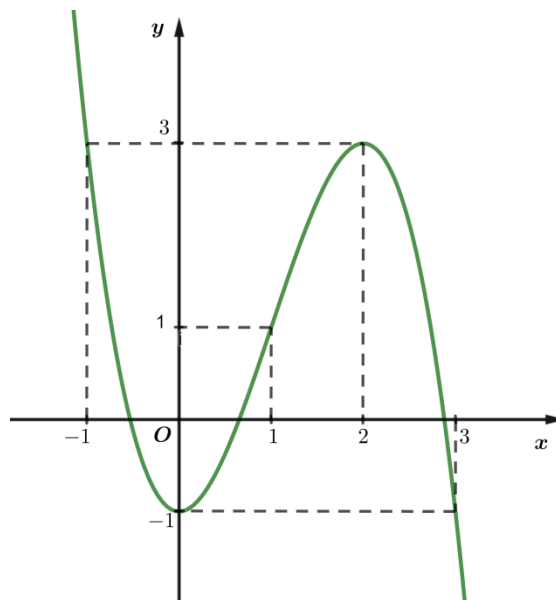
D. $\pm 2\sqrt[4]{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_2^m x^3 dx = 8 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} \Big|_2^m = 8 \Leftrightarrow \frac{m^4 - 2^4}{4} = 8 \Leftrightarrow m^4 - 2^4 = 32 \Leftrightarrow m^4 = 48 \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{48} = \pm 2\sqrt[4]{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\square$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f'(x) dx$ bằng



A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)|_1^2 = f(2) - f(1) = 3 - 1 = 2.$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$ là $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + e^x$.		
b)	Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + \sin x + C$ thì $f(x) = 12x^2 + \cos x$.		
c)	Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Khi đó $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2$.		
d)	Cho hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ và $F(0) = 1$. Khi đó $F(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) - 1$.		

Lời giải

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----

a)	Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$ là $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + e^x$.		X
b)	Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + \sin x + C$ thì $f(x) = 12x^2 + \cos x$.	X	
c)	Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Khi đó $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2$.	X	
d)	Cho hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ và $F(0) = 1$. Khi đó $F(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) - 1$.		X

a) Ta có $\int f(x)dx = \int (x^4 + x^2 + e^x)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + e^x + C$ suy ra mệnh đề **sai**.

b) Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + \sin x + C$ thì $f(x) = 12x^2 + \cos x$

Ta có $f(x) = (4x^3 + \sin x + C)' = 12x^2 + \cos x$. Suy ra mệnh đề **đúng**

c) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Khi đó $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

Do $F(0) = 2$ ta có $\frac{1}{2}\ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2$ ta có $C = 2$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2$ ta có $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2$. Suy ra mệnh đề **đúng**

d) Cho hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ và $F(0) = 1$. Khi đó $F(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) - 1$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4+1}d(x^4+1) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$.

Do $F(0) = 1$ nên $\frac{1}{4}\ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy: $F(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + 1$. Suy ra mệnh đề **sai**.

Câu 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai.

a) Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

b) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x - 3$ là $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} - 3x + C$

c) Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng 28

d) Hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$. Khi đó giá trị của tham số m là 5

Lời giải

a) Sai

Ta thấy $F(x) = x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1$. Nhưng hàm số $F(-x) = -x$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1$. Vậy mệnh đề sai.

b) Đúng

$$\int f(x) dx = \int (e^{2x} + x - 3) dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

c) Đúng

$$\int_1^3 (1 + f(x)) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 f(x) dx = x \Big|_1^3 + x^3 \Big|_1^3 = 2 + 26 = 28$$

d) Sai

$$\text{Ta có: } F'(x) = 3mx^2 + 2(3m+2)x - 4.$$

$$\begin{aligned} F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) &\Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m+2) = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - 3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) $\int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1).$

b) Nếu $F(0) = 1$ thì $F(2) = 12.$

c) Nếu $\int_0^2 af(x) dx = 32$ thì $a = 6.$

d) Biết $\int_0^2 e^{3x} f(x) dx = a + \frac{b.e^6}{27}.$ Khi đó: $27a - b = -2.$

Lời giải

a) Đúng theo định nghĩa

b) Sai

$$\int_0^2 f(x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

$$\Rightarrow F(2) = \int_0^2 f(x) dx + F(0) = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}$$

c) Đúng

$$\int_0^2 af(x) dx = 32 \Leftrightarrow a \cdot \int_0^2 f(x) dx = 32$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{16}{3} = 32 \Leftrightarrow a = 6$$

d) Đúng

Đặt $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x} \cdot f(x)$

Khi đó: $F'(x) = e^{3x} \cdot f(x) \Rightarrow 3e^{3x}(ax^2 + bx + c) + e^{3x} \cdot (2ax + b) = e^{3x} \cdot f(x)$

$$\Rightarrow 3(ax^2 + bx + c) + 2ax + b = f(x)$$

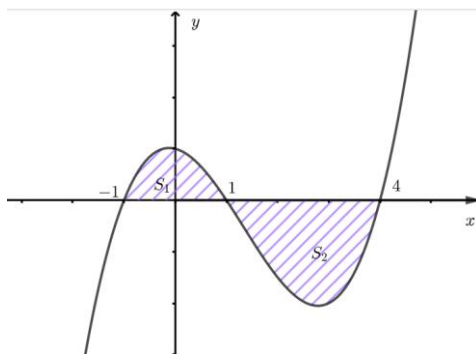
$$\Rightarrow 3ax^2 + (3b + 2a)x + 3c + b = 2x^2 - 3$$

$$\text{Đồng nhất hai vế, ta được: } \begin{cases} 3a = 2 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{9} \\ c = -\frac{23}{27} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \int_0^2 e^{3x} f(x) dx = e^{3x} \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{23}{27} \right) \Big|_0^2 = e^6 \cdot \frac{25}{27} + \frac{23}{27}$$

$$\text{Kết luận: } a = \frac{23}{27}; b = 25 \text{ và } 27a - b = -2.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hai phần gạch chéo lần lượt là $S_1 = 8, S_2 = 20$.

a) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 8.$

b) $\int_{-1}^4 f(x)dx = 28.$

c) Một vật chuyển động với phương trình $v(t) = t^2 - 4t + 5$. Quãng đường vật đó đã di chuyển được từ lúc bắt đầu tới lúc gia tốc bị triệt tiêu là $\frac{14}{3}$ (m).

d) Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 30 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là $AB = 8$ cm, trục bé $CD = 12$ cm. Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng $900 - 48\pi$ (cm²).



Lời giải

a). ĐÚNG

Theo định nghĩa ta có :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 8.$$

Do đó mệnh đề đã cho đúng.

b). SAI

Theo định nghĩa ta có :

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = S_1 - S_2 = 8 - 20 = -12.$$

c). ĐÚNG

Gia tốc của vật đó là $a = v'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Quãng đường vật đó di chuyển từ lúc bắt đầu tới lúc gia tốc bị triệt tiêu là:

$$S = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (t^2 - 4t + 5) dt = \frac{14}{3}.$$

Do đó mệnh đề đã cho đúng.

d). SAI

Gọi S_1 là diện tích hình vuông, S_2 là diện tích khoét đi.

Ta có $S_1 = 30^2 = 900 (\text{cm}^2)$ và $S_2 = 2\pi ab = 2\pi \cdot 8 \cdot 6 = 96\pi (\text{cm}^2)$ (vì mỗi phần bị khoét đi là nửa elip có $a = 8$, $b = 6$).

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = S_1 - S_2 = 900 - 96\pi (\text{cm}^2)$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Biết rằng $\int_2^t \frac{2x-1}{x^2-4x+3} dx = f(t)$ với $t > 4$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên $[5; 6]$ bằng $\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + b$

Lời giải

Đáp án: 32

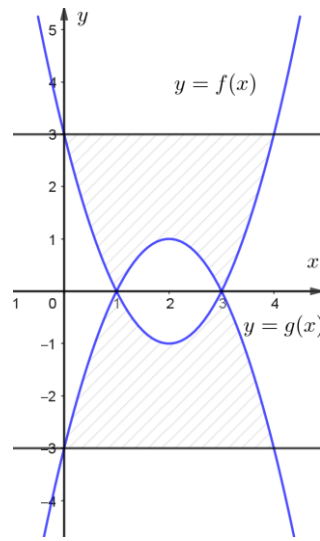
Ta có

$$\begin{aligned} \int_2^t \frac{2x-3}{x^2-4x+3} dx &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x-3)} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x-3| \right) \Big|_2^t \\ &= \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{3}{2} \ln|t-3| \end{aligned}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2(t-1)} + \frac{3}{2(t-3)} > 0 \quad \forall t > 4 \text{ nên hàm số luôn đồng biến trên}$$

$$\text{Vậy } \max_{[5;6]} f(x) = f(6) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{27} \Rightarrow a + b = 32.$$

Câu 2: Tính diện tích phần gạch sọc trong hình vẽ sau:

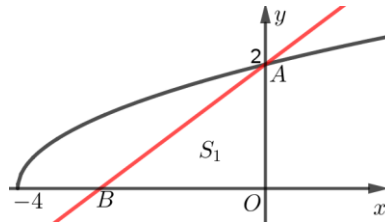


Lời giải

Ta có: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ và $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

$$\text{Diện tích cần tìm là: } S = 2 \left(2 \int_0^1 [3 - (x^2 - 4x + 3)] dx + \int_1^3 [3 + (x^2 - 4x + 3)] dx \right) = 16.$$

Câu 3: (Mức 3) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0; 2)$ và chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau (Hình bên). Giá trị $a + b$ bằng



Lời giải

Đáp án: 2

Phân giải chi tiết:

Gọi S là diện tích hình (H) suy ra $S = \int_{-4}^0 \sqrt{x+4} dx = \frac{16}{3}$.

Gọi S_1 là diện tích hình (H_1) giới hạn bởi đường thẳng d , trục tung và trục hoành.

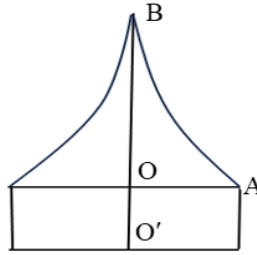
Do $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0; 2)$ suy ra $b = 8$.

Theo giả thiết thì $S_1 = \frac{S}{2} = \frac{8}{3}$ mà $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \Rightarrow OB = \frac{8}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$.

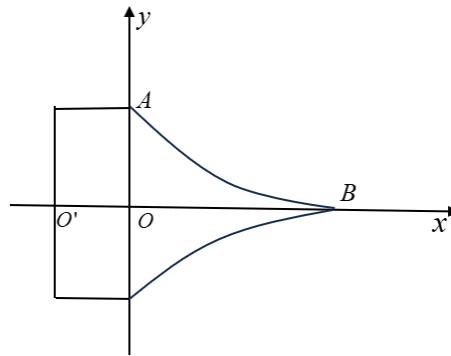
Do $B \in d \Rightarrow a = -6$.

Vậy $a + b = 2$.

Câu 4: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Lan đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 6$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B . Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng phần nguyên, đơn vị cm^3)



Lời giải



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 6$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Ox là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 6 \cdot 10^2 \pi = 600\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh $B(20;0)$ nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-20)^2$.

Vì (P) qua điểm $A(0;10)$ nên $a = \frac{1}{40}$. Do đó, $(P): y = \frac{1}{40}(x-20)^2$.

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} \left[\frac{1}{40}(x-20)^2 \right]^2 dx = 400\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = 600\pi + 400\pi = 1000\pi \approx 3142 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 5: Một hộ gia đình sản xuất cơ khí nhỏ mỗi ngày sản xuất được x sản phẩm ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x sản phẩm, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm số sau $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả

sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng/sản phẩm. Tính lợi nhuận tối đa mà gia đình đó thu được khi sản xuất và bán sản phẩm?

Lời giải

Chi phí để sản xuất x sản phẩm bằng $C(x) = \int C'(x)dx = x^3 - 2x^2 + 10x + C$

Mà chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng

Suy ra $C(0) = 500 \Rightarrow C = 500 \Rightarrow C(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 500$

Khi bán x sản phẩm, số tiền thu được là: $270x$ (nghìn đồng).

Do đó lợi nhuận thu được là: $T(x) = -x^3 + 2x^2 + 260x - 500$ (nghìn đồng).

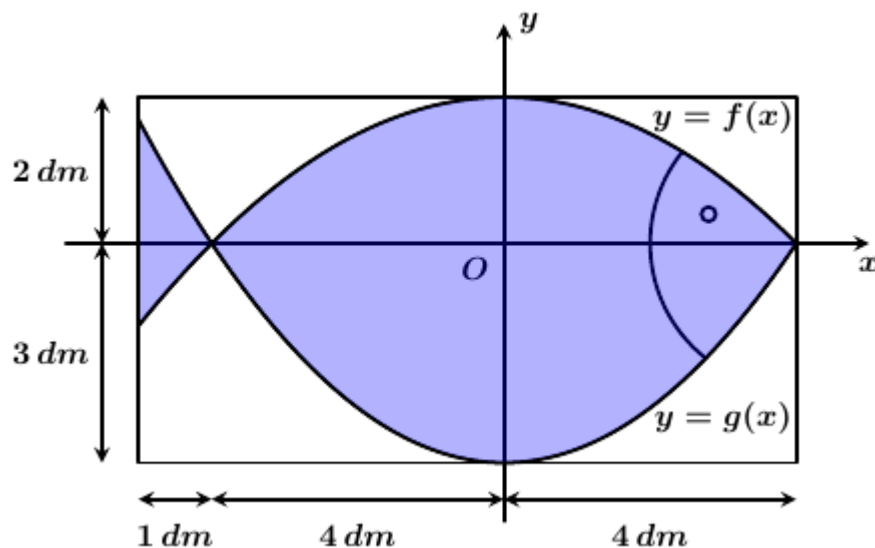
Ta có $T'(x) = -3x^2 + 4x + 260 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -\frac{26}{3}$ (loại).

Bảng biến thiên

x	0	10	20	
$T'(x)$		+	0	-
$T(x)$			1300	

Lợi nhuận tối đa là 1300 nghìn đồng khi sản xuất 10 sản phẩm mỗi ngày.

Câu 6: Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật có chiều dài 9 dm và chiều rộng 5 dm, người ta thiết kế một logo hình con cá. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét), sau đó logo được sơn màu xanh với chi phí 20 000 đồng/ dm^2 ; phần còn lại sơn màu trắng với chi phí 10 000 đồng/ dm^2 .

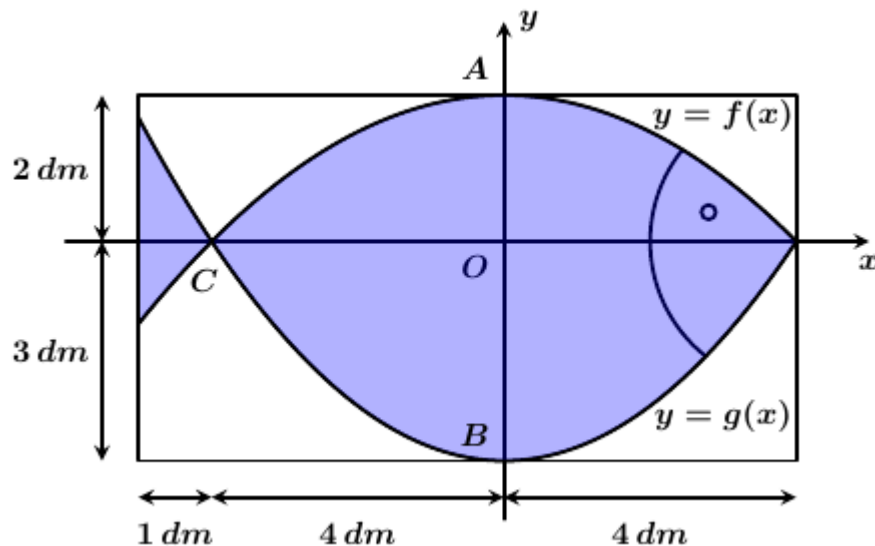


Số tiền cần dùng để trang trí bảng gỗ trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)

Lời giải

Đáp án: 730 nghìn đồng.

Phân giải chi tiết



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

+ Parabol $y = f(x)$ có đỉnh là $A(0;2)$ nên $y = f(x) = ax^2 + 2$

Mặt khác, $C(-4;0)$ thuộc parabol $y = f(x)$ nên $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$

+ Parabol $y = g(x)$ có đỉnh là $B(0;-3)$ nên $y = g(x) = bx^2 - 3$

Mặt khác, $C(-4;0)$ thuộc parabol $y = g(x)$ nên $y = g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$

+ Diện tích logo hình con cá là: $S_1 = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| dx = \frac{1345}{48} (dm^2)$

+ Diện tích phần được sơn màu trắng là: $S_2 = 9.5 - S_1 = \frac{815}{48} (dm^2)$

+ Chi phí để trang trí là: $20\,000.S_1 + 10\,000.S_2 \approx 730\,000$ (đồng).

•Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2$ là:

- A.** $F(x) = 2x^3 + C$. **B.** $F(x) = \frac{2}{3}x^3$. **C.** $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. **D.** $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$.

Lời giải

Chọn **D**.

Ta có: $\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{2x^3}{3} + C.$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x$?

A. $F(x) = 2\cos x$. **B.** $F(x) = -2\cos x$. **C.** $F(x) = \sin^2 x + C$. **D.** $F(x) = \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int 2\sin x dx = 2 \int \sin x dx = 2 \cdot (-\cos x) = -2\cos x.$

Câu 3: Hàm số $F(x) = \log x$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $y = \frac{1}{x}$. **B.** $y = \frac{1}{x \ln 10}$. **C.** $y = \frac{\ln 10}{x}$. **D.** $y = \frac{1}{x \log 10}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $F'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 4: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$. **B.** $F(x) = 2e^{2x} + C$. **C.** $F(x) = e^{2x} + C$. **D.** $F(x) = 2e^{2x} + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int e^{2x} dx = \int (e^2)^x dx = \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. **B.** $\int_a^b k dx = k(b-a), \forall k \in \mathbb{R}$.

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in [a; b]$. **D.**

$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$

Lời giải

Chọn D.

Theo tính chất tích phân A, B, C đúng

Đáp án D sai vì: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

$$I = \int_0^2 (2x+1)dx$$

Câu 6: Tính tích phân

A. $I = 6.$

B. $I = 5.$

C. $I = 2.$

D. $I = 4.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6.$

Câu 7: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Khi đó $\int_5^2 4f(x)dx$ bằng:

A. 32.

B. - 40.

C. 36.

D. 40

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_5^2 4f(x)dx = -4 \int_2^5 f(x)dx = -4.10 = -40.$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;9]$, thỏa mãn $\int_1^9 f(x)dx = 24$ và $\int_4^5 f(x)dx = 7$. Tính giá trị

biểu thức $I = \int_1^4 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx.$

A. $I = 168.$

B. $I = -17.$

C. $I = 31.$

D. $I = 17.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $24 = \int_1^9 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx = 7 + I \Leftrightarrow I = 24 - 7 = 17.$

Câu 9: Hàm số $F(x) = 2x^3 - 2x + 1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 6x^2 - 2 + x.$

B. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x.$

C. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x + C.$

D. $f(x) = 6x^2 - 2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = F'(x) = (2x^3 - 2x + 1)' = 6x^2 - 2.$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-1;2]$. Biết $f(-1)=1, f(2)=10$, tính tích phân $\int_{-1}^2 [2x + f'(x)]dx.$

A. 13.

B. 12.

C. 11.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{-1}^2 [2x + f'(x)] dx = [x^2 + f(x)]_{-1}^2 = 3 + f(2) - f(-1) = 3 + 10 - 1 = 12$.

Câu 11: Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox . Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

B. $V = \int_0^2 e^x dx$.

C. $V = \pi \int_0^2 e^x dx$.

D. $V = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox sẽ tạo thành

một khối tròn xoay có thể tích bằng $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 12: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 + \sin t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức

A. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t) dt$.

B. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t)^2 dt$.

C. $s(t) = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos t) dt \right|$.

D. $s(t) = v\left(\frac{3\pi}{4}\right) - v(0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $s(t)$ là quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến $t = \frac{3\pi}{4}$

(giây). Mà $s'(t) = v(t)$ nên ta có $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t) dt$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $F(x); G(x)$ lần lượt là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + 8$; $g(x) = 5^x - e^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Có $\int (f(x) - g(x)) dx = F(x) - G(x) + C$.

b) $\int g(x) dx = 5^x \ln 5 - e^x + C_2$.

c) $F(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1.$

d) Biết $F(0) = 5; G(0) = \frac{1}{\ln 5} - 1$. Ta có $F(1) - G(1) = \frac{67}{5} - \frac{5}{\ln 5} + e.$

Lời giải

a) Theo tính chất nguyên hàm ta có: $\int (f(x) - g(x))dx = F(x) - G(x) + C.$

Suy ra mệnh đề a **đúng**.

b) Ta có:

$$\int g(x)dx = \int (5^x - e^x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x + C_2$$

Suy ra mệnh đề b **sai**.

c) $F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 8\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1.$

Suy ra mệnh đề c **sai**.

d) Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 8\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1$

mà $F(0) = 5 \Rightarrow C_1 = 5 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 8x + 5$

Ta có: $G(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x + C_2$

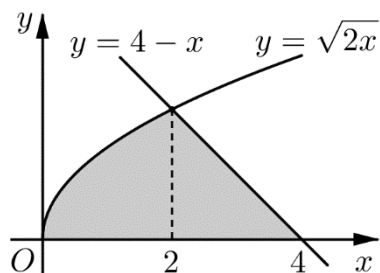
mà $G(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln 5} - 1 + C_2 = \frac{1}{\ln 5} - 1 \Leftrightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow G(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x$

Do đó: $F(1) - G(1) = \frac{2}{5} + 8 + 5 - \frac{5}{\ln 5} + e = \frac{67}{5} - \frac{5}{\ln 5} + e.$

Suy ra mệnh đề d **đúng**.

Câu 2: Cho đồ thị như hình vẽ



a. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = 4 - x$ là $x = 2.$

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = 0, x = 2$ là $S_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx.$

c. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là $S_2 = \int_0^2 (x - 4)dx$.

d. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox (như hình vẽ) được tính bởi công thức $S = \int_0^2 \sqrt{2x}dx + \int_2^4 (4 - x)dx$.

Lời giải

a) Đúng.

$$\sqrt{2x} = 4 - x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = 4 - x$ là $x = 2$.

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là $S_1 = \int_0^2 \sqrt{2x}dx$.

c) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là $S_2 = \int_2^4 (4 - x)dx$.

d) Đúng.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox (như hình vẽ) được tính bởi công thức $S = \int_0^2 \sqrt{2x}dx + \int_2^4 (4 - x)dx$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, chỉ ra mệnh đề đúng, mệnh đề sai.

a) $\int_0^2 (3x^2 - 2e^x)dx = 6 - 2e^2$.

b) Nước chảy từ đáy của một bồn chứa với tốc độ $k(t) = 250 - 6t$ (lít/phút), trong đó $0 \leq t \leq 45$. Lượng nước chảy ra khỏi bồn chứa trong 10 phút đầu tiên bằng 2200 (lít).

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \cot^2 x)dx = a - \frac{b}{c}\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản thì $a + b + c = 9$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos^2 x - \sin x \cos x|dx = a + b\pi - c\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thì $a - c + b = \frac{5}{6}$.

Lời giải

a). SAI

$$\int_0^2 (3x^2 - 2e^x) dx = 3 \int_0^2 x^2 dx - 2 \int_0^2 e^x dx = x^3 \Big|_0^2 - 2e^x \Big|_0^2 = 8 - (2e^2 - 2) = 10 - 2e^2.$$

b). **ĐÚNG**

Lượng nước chảy ra khỏi bồn chứa trong 10 phút đầu tiên là

$$V = \int_0^{10} k(t) dt = \int_0^{10} (250 - 6t) dt = (250t - 3t^2) \Big|_0^{10} = 2200 \text{ (lít)}.$$

c). **ĐÚNG**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \cot^2 x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}. \text{ Do đó } a + b + c = 9. \end{aligned}$$

d). **SAI**

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos^2 x - \sin x \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (|\cos x| \cdot |\cos x - \sin x|) dx$$

Ta có $\cos x > 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và phương trình $\cos x - \sin x = 0$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{3}} (|\cos x| \cdot |\cos x - \sin x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x \cdot (\cos x - \sin x)] dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos x \cdot (\cos x - \sin x)] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin x \cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x - \sin x \cos x) dx$$

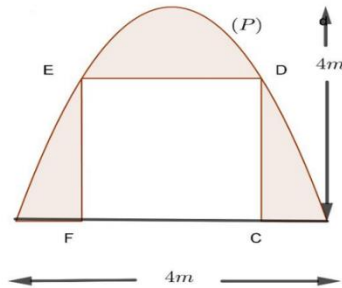
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x - \sin 2x) dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ((1 + \cos 2x - \sin 2x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

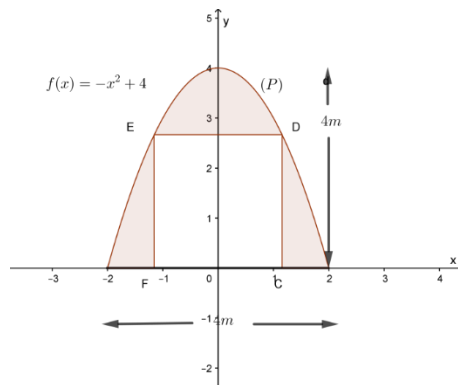
$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Do đó $a = \frac{5}{8}, b = \frac{1}{12}, c = \frac{1}{8} \Rightarrow a - c + b = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Câu 4: Một chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng $4m$ (Tham khảo hình vẽ). Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phần tô đậm là $1.000.000$ đồng/ m^2 .



a) Chọn hệ trục tọa độ Oxy , như hình vẽ thì phương trình của đường cong (P) cánh cổng là $y = f(x) = -x^2 + 4$.



b) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chiều rộng của cửa là $CF = 2\sqrt{2}m$.

c) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chi phí để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{32 - 6\sqrt{2}}{3} \right)$ triệu đồng.

d) Số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm (làm tròn đến hàng nghìn đồng) là 4.508.000 đồng.

Lời giải

a). ĐÚNG

Từ hình vẽ, ta có parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Do (P) có đồ thị là parabol có đỉnh $(0;4)$ và đi qua điểm có tọa độ là $(2; 0)$ nên

$$\begin{cases} b=0 \\ c=4 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}. \text{ Vậy } (P) \text{ có phương trình } y=-x^2+4.$$

b). ĐÚNG

Theo giả thiết điểm D thuộc đồ thị (P) có tung độ bằng 2 suy ra hoành độ là nghiệm phương trình $-x^2+4=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Theo đồ thị điểm D có hoành độ dương nên $D(\sqrt{2};2)$

Chiều rộng của cửa là $CF=2.OD=2\sqrt{2}(m)$.

c) SAI

Ta có, diện tích của (P) tạo với trục hoành là: $S=\int_{-2}^2(-x^2+4)dx=\frac{32}{3}m^2$.

Diện tích hình chữ nhật $CDEF$ là $S_{CDEF}=2.2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Diện tích cần trang trí là $S_1=S-S_{CDEF}=\frac{32}{3}-4\sqrt{2}=\frac{32-12\sqrt{2}}{3}$.

Chi phí để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{32-12\sqrt{2}}{3}\right).1000000$ (đồng)

d) ĐÚNG

Ta có, diện tích của (P) tạo với trục hoành là: $S=\int_{-2}^2(-x^2+4)dx=\frac{32}{3}m^2$.

Ta gọi điểm $C(a;0) \Rightarrow D(a;-a^2+4); 0 < a < 2$.

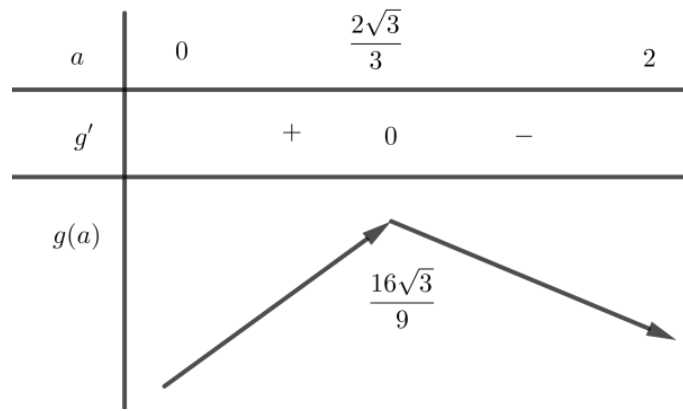
Do đó, diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ là: $S_{CDEF}=2a(4-a^2)=8a-2a^3$.

Theo đề bài, để phần trang trí, có chi phí nhỏ nhất thì diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ đạt giá trị lớn nhất.

Do công chào đối xứng qua trục tung nên ta đặt: $g(a)=\frac{S_{CDEF}}{2}=4a-a^3, 0 < a < 2$.

$$\Rightarrow g'(a)=4-3a^2 \Rightarrow g'(a)=0 \Rightarrow a=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có, BBT:

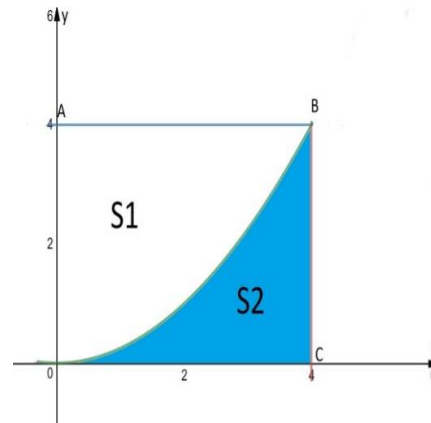


Dựa vào bảng biến thiên, suy ra diện tích hình chữ nhật $CDEF$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{32\sqrt{3}}{9} m^2$. Vậy, diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là $\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9} m^2$.

Do đó, số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \right) \cdot 1000000 = 4508263,795 \approx 4.508.000$ đồng.

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Lời giải

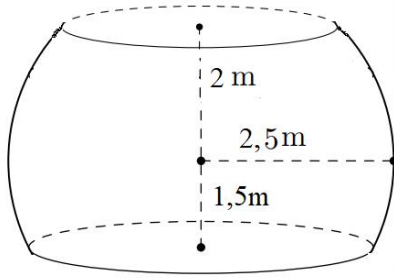
Đáp án: 2

Diện tích phần bị gạch là $S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$ (đvdt).

Diện tích phần không bị gạch là $S_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ (đvdt).

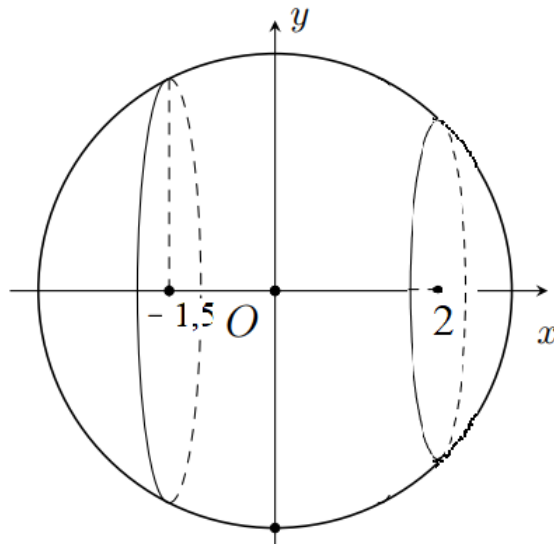
Vậy $\frac{S_1}{S_2} = 2$.

Câu 2. Mặt trong của một hầm biogas có hình dạng là một phần của mặt cầu đã cắt bỏ hai phần của nó bằng hai mặt phẳng song song với nhau (như hình vẽ). Bán kính của mặt cầu bằng $2,5m$. Mặt đáy phía dưới cách tâm một khoảng bằng $1,5m$. Mặt đáy phía trên cách tâm một khoảng bằng $2m$. Tính gần đúng thể tích phần bên trong của hầm biogas đó (đơn vị là m^3 và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 56,8



Phần giải chi tiết

Trên hệ trục Oxy xét đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 2,5^2$. Khi đó nửa phần trên trục hoành của (C) có phương trình $y = \sqrt{2,5^2 - x^2}$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa phần trên trục hoành của (C) , trục Ox và các đường thẳng $x = -1,5, x = 2$. Quay hình phẳng (H) quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích bằng thể tích phần không gian phía trong của hầm biogas.

Thể tích phần không gian bên trong hầm biogas được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_{-1,5}^2 2,5^2 - x^2 dx = \frac{217}{12} \pi \approx 56,8$$

Câu 3. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ được viết kết quả dưới dạng $\frac{a\pi}{b}$. Tính $V = 128a - 8b$.

Lời giải

Đáp án: 2024

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2$; $x = 4$.

Thể tích vật thể bằng:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_2^4 \left| (x-2)^2 - \sqrt{x}^2 \right| dx = \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_2^4 (x - (x-2)^2) dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 16; b = 3$.

Do đó $V = 128.16 - 8.3 = 2024$.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người ta nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20(m/s)$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối bằng.....

Lời giải

Khi ô tô dừng lại, ta có $v(t) = 0 \Rightarrow -2t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10(s)$.

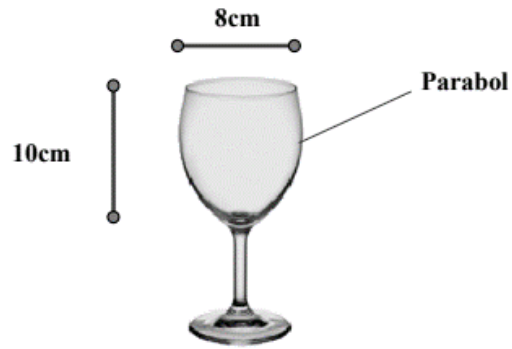
Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (-2t + 20) dt = (-t^2 + 20t) \Big|_0^{10} = 100(m)$$

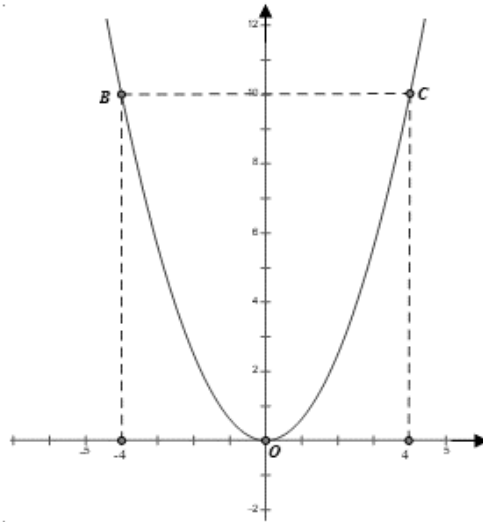
Trong 5 giây trước đó, ô tô vẫn đi với vận tốc $20(m/s)$ nên quãng đường ô tô đi được trong 5 giây này là $5.20 = 100(m)$.

Vậy quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối bằng $100 + 100 = 200(m)$.

Câu 5. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay (không kể phần chân đế) có kích thước như hình vẽ bên dưới. Thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích rượu tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo thể tích là cm^3)



Lời giải

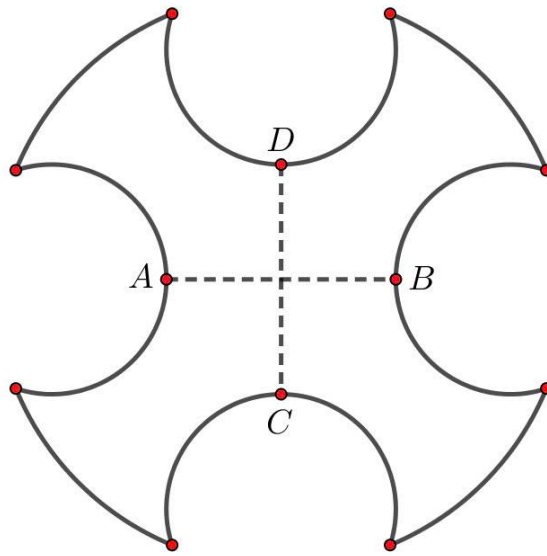


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

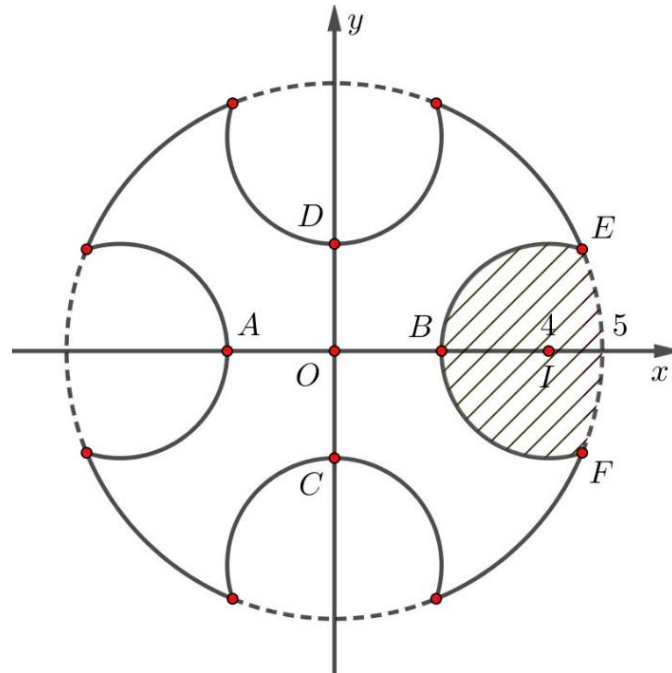
$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251,33.$$

Câu 6. Một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên nhận AB, CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm , các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng 2 dm , $AB = CD = 4\text{ dm}$ và chi phí sơn là $100\,000$ đồng/ m^2 . Tính chi phí x (nghìn đồng) để sơn hoàn thiện chi tiết máy (làm tròn đến sau dấu phẩy 1 chữ số).



Lời giải

Trả lời: $x = 79,5$ (nghìn đồng).



Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho O trùng với giao điểm của AB và CD ; các tia lần lượt trùng với các tia OB, OD . Ta có:

Phương trình đường tròn lớn tâm O là: $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

Phương trình đường tròn nhỏ tâm I là: $(x - 4)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - (x - 4)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường tròn là: $4 - (x - 4)^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{37}{8}$.

Gọi S, S_t, S' lần lượt là diện tích một mặt của chi tiết, diện tích đường tròn tâm O và diện tích phần gạch sọc.

$$\text{Ta có: } S = S_t - 4S' = 25\pi - 4 \cdot \left(2 \int_2^{\frac{37}{8}} \sqrt{4 - (x-4)^2} dx + 2 \int_{\frac{37}{8}}^5 \sqrt{25 - x^2} dx \right)$$

Vậy chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy là: $x = S \cdot 2.1000 \approx 79,5$ (nghìn đồng).

♦ **Đề 3:**

 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

- A.** $4x^4 + C$. **B.** $3x^2 + C$. **C.** $x^4 + C$. **D.** $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Lời giải

Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$. **Chọn D.**

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- A.** $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. **B.** $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$.
C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ($0 < a \neq 1$) ta được đáp án A.

Câu 3: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A.** $4x^3 + 2x + C$. **B.** $x^4 + x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^5 + x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **Chọn C.**

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Chọn B.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và $\int_2^3 f(x) dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 12.

B. 7.

C. 1.

D. -12

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -3 + 4 = 1$.

Vậy $\int_1^3 f(x) dx = 1$.

Câu 6: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

A. $I = 7$.

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 5 + \pi$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

Câu 7: Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx$ bằng

A. 12.

B. 9.

C. 5.

D. 6

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3) dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9$.

Vậy: $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = 9$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$; Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.

- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3)dx = \left(x^3 + 5x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = 9.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2\cos^2 x + 1)dx = \int \left(2\cos^2 x + \frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \int (\cos 2x + 2)dx \\ &= \int \cos 2x dx + \int 2dx = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4\right)dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(x^2 + 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}. \end{aligned}$$

Câu 9: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$ là

- A. $S = 20$. B. $S = 18$. C. $S = 3$. D. $S = \frac{7}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = 20.$$

Câu 10: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x, y = 0, x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_0^2 (x - x^2)dx$. B. $S = \int_1^2 (x^2 - x)dx - \int_0^1 (x^2 - x)dx$.
C. $S = \int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$. D. $S = \int_0^2 (x^2 - x)dx$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \int_0^2 |x^2 - x| dx = -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$$

Câu 11: Cho hình (H) giới hạn bởi parabol $y = 2x - x^2$ và trục hoành Ox . Thể tích khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh trục Ox bằng:

- A.** $\frac{15\pi}{16}$. **B.** $\frac{15\pi}{17}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{15\pi}{17}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành Ox là:

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hình (H) được giới hạn bởi: $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$.

Thể tích của khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = k (k > 0)$ bằng $\frac{17}{2}$. k thuộc khoảng nào?

- A.** $k \in (0; 2)$. **B.** $k \in (5; 10)$. **C.** $k \in (3; 5)$. **D.** $k \in (1; 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = \int_{-1}^k |2x^3| dx = \frac{17}{2} \Leftrightarrow -\int_{-1}^0 2x^3 dx + \int_0^k 2x^3 dx = \frac{17}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^4}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{2} \Big|_0^k = \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{k^4}{2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow k^4 = 16 \Leftrightarrow k = 2 \text{ (vì } k > 0 \text{)}.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho các hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ và $g(x) = \frac{3}{x^2}$ xác định trên tập $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a. Mệnh đề 1 Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên D .		

b. Mệnh đề 2 Hàm số $F(x) = 2x - 3\ln x + C$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$.		
c. Mệnh đề 3 Cho $F(1) = 5$, khi đó $F(x) = 2x - 3\ln x + 3$.		
d. Mệnh đề 4 $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ thỏa mãn $G(1) = 4$. Khi đó $G(2) = 2$.		

Lời giải

Mệnh đề	Đúng	Sai
a. Mệnh đề 1 Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên D.	x	
b. Mệnh đề 2 Hàm số $F(x) = 2x - 3\ln x + C$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$.	x	
c. Mệnh đề 3 Cho $F(1) = 5$, khi đó $F(x) = 2x - 3\ln x + 3$.	x	
d. Mệnh đề 4 $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ thỏa mãn $G(1) = 4$. Khi đó $G(2) = 2$.		x

a) Ta có $f'(x) = \frac{3}{x^2} = g(x), \forall x \in D$. Vậy hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên D. Chọn **đúng**.

b) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{2x-3}{x} dx = \int \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx = 2x - 3\ln|x| + C$. Chọn **đúng**.

c) Vì $F(1) = 5 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3\ln 1 + C = 5 \Rightarrow C = 3$. Vậy $F(x) = 2x - 3\ln|x| + 3$. Chọn **đúng**.

d) Vì $G(x) = \int xf(x)dx = \int x \left(\frac{2x-3}{x} \right) dx = \int (2x-3)dx = x^2 - 3x + C$, và $G(1) = 4 \Rightarrow 1 - 3 \cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow G(x) = x^2 - 3x + 6$. Vậy $G(2) = 4$. Chọn **sai**.

Câu 2. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - x, x = -1, x = 2$ và trục hoành. Gọi S là diện tích của D .

a) $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$.

b) $S = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^2 (x^2 - x) dx$.

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox được tính bằng $V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx$.

d) $S = \frac{5}{6}$.

Lời giải

a). ĐÚNG

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$$

b). SAI

c). ĐÚNG

$$V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx$$

d). SAI

Ta có $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx = \frac{11}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + 3, & x < 2 \end{cases}$

a. $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2) dx$

b. $\int_2^3 f(x) dx = \frac{41}{16}$

c. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{13}{4}$

d. $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{16}{3}$

Lời giải

a.	$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2) dx$ (do $x \geq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + x - 2$)	Đúng
b.	$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big _2^3 = \frac{15}{2} - \frac{2}{3} = \frac{41}{6}$	Sai

c.	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 3\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x\right)\Big _0^1 = \frac{13}{4} - 0 = \frac{13}{4}$	Đúng
d.	$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x + 3\right)dx + \int_2^3 (x^2 + x - 2)dx = \frac{39}{4} + \frac{41}{6} = \frac{199}{12}$	Sai

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - 4x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -6$.

a) $m = -4$.

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

c) $\int_{-1}^5 f(x)dx = 108$.

d) $\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 3$.

Lời giải

a) ĐÚNG

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = -3 \Leftrightarrow m = -4$.

b) ĐÚNG

Ta có $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$$F(-2) = (-2) - 2 \cdot (-2)^2 + C_2 = C_2 - 10 \Rightarrow C_2 = 10 - 6 = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x^2 + mx + C_1) = m + C_1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2x^2 + C_2) = -1 + C_2 = 3.$$

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow m + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 3 - m = 7$.

Vậy $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

c) SAI

$$\text{Ta có } \int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1-4x) dx + \int_1^5 (3x^2 - 2x - 4) dx = 86$$

d) SAI

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow t=0;$$

$$\text{Khi } x=e^2 \Rightarrow t=2.$$

Do đó

$$\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (1-4x) dx + \int_1^2 (3x^2 - 2x - 4) dx = -1.$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: (MD3) Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x dx = \frac{\pi^2}{8} + \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy $a=8, b=1, c=2$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

Trả lời: 69.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m, & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Đáp án: -19

Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Tổng $T = a + b + 3c$ bằng

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx = \int_{-1}^0 (3+x^2)^{\frac{1}{2}} d(3+x^2) = \frac{2}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^1 f(x) dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \text{ Suy ra } a=1; b=2; c=-\frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19.$$

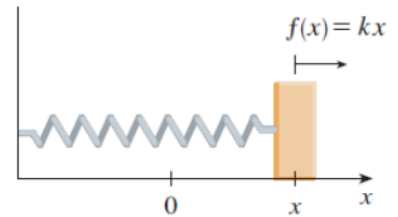
Câu 3: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a + b + c$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x dx = \frac{\pi^2}{8} + \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy $a=8, b=1, c=2$. Vậy $T = a + b + c = 12$.

Câu 4: Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để kéo giãn lò xo thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = k \cdot x$ (N) với k (N/m) là độ cứng của lò xo. Một lực $50N$ được dùng để kéo giãn lò xo từ $10cm$ đến độ dài $15cm$. Hỏi cần thực hiện một công là bao nhiêu để kéo giãn lò xo từ $15cm$ đến $20cm$?



Đáp án:

Lời giải

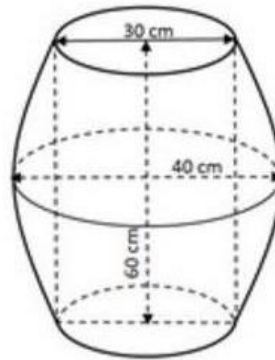
Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài từ $10cm$ đến $15cm$, thì lượng kéo giãn là $x = 15 - 10 = 5cm \Rightarrow x = 0,05m$. Điều này có nghĩa là $f(0,05) = 50 \Rightarrow 0,05 \cdot k = 50 \Rightarrow k = 50 : 0,05 = 1000 (N/m)$.

Do đó, ta có:

$f(x) = 1000 \cdot x (N)$ và công cần thực hiện để kéo giãn lò xo từ $15cm$ đến $20cm$ là

$$A = \int_{0,15}^{0,2} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0,15}^{0,2} = 1000 \cdot \left(\frac{0,2^2}{2} - \frac{0,15^2}{2} \right) = 8,75(J).$$

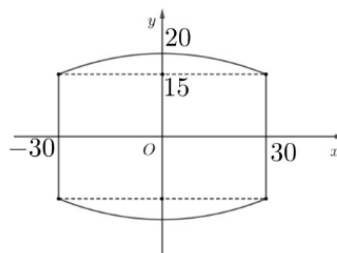
Câu 5: Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng Bia hơi. (làm tròn đến hàng phần chục).



Đáp án:

Lời giải

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A\left(3; \frac{3}{2}\right)$ và có đỉnh $I(0; 2)$ (hình vẽ bên dưới).



Khi đó thể tích thùng Bia bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = -3$ quay quanh trục Ox .

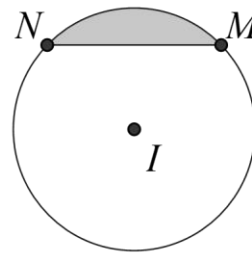
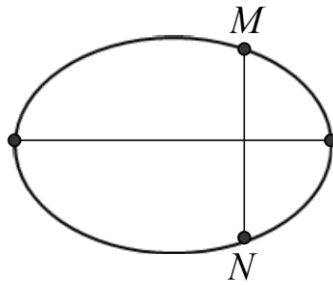
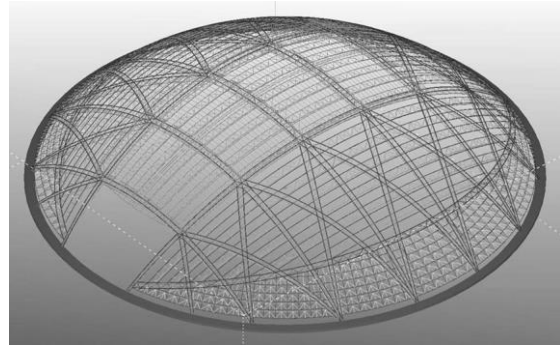
Ta thấy (P) có đỉnh $I(0; 2)$ nên $(P): y = ax^2 + 2$, mặt khác (P) đi qua điểm $A\left(3; \frac{3}{2}\right)$ nên ta tìm được (P) có phương trình $y = \frac{-x^2}{18} + 2$.

Khi đó thể tích thùng Bia là:

$$V = \pi \int_{-3}^3 \left(\frac{-x^2}{18} + 2 \right)^2 dx = \frac{203}{10} \pi (dm^3) \approx 63,8 (\text{lít}).$$

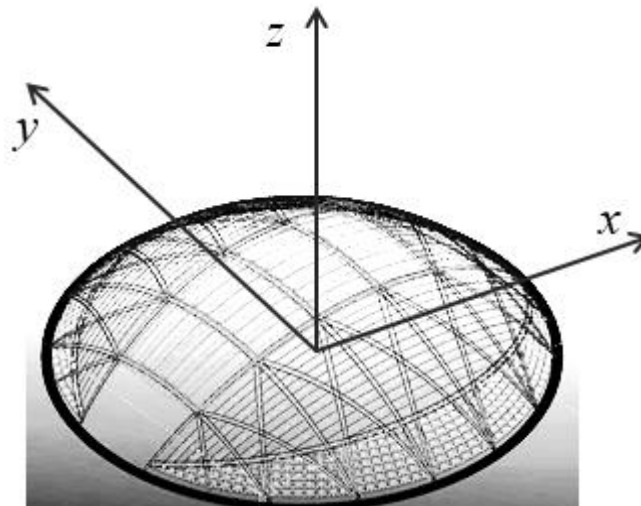
Câu 6: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài 150m, trục bé dài 90m (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo

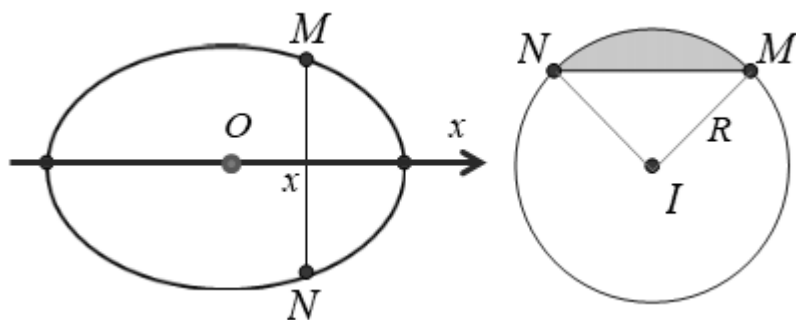
một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200 \text{ BTU} / \text{m}^3$. Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU?



Trả lời:.....

Lời giải





Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Lúc đó } MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Vậy thể tích khoảng không bên dưới mái che và bên trên mặt sân là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586m^3.$$

Số chiếc điều hòa cần lắp là

$$115586.200 : 50000 = 462,344$$

Vậy cần 463 chiếc điều hòa.